



Universidad Simón Bolívar  
Departamento de Matemáticas  
Puras y Aplicadas

Abr-Jul 2024  
Matemáticas III (MA-1116) - Sección 2  
3<sup>er</sup> Examen Parcial (35 %)  
Modelo C

**Nombre y Apellido:**

**Carnet:**

1. (Valor: 4 puntos) Demuestre que los vectores  $v_i$  forman una base ortogonal  $B$ , luego expresar el vector  $w$  como una combinación lineal de dichos vectores  $v_i$  y proporcionar el vector coordenada  $[w]_B$

$$v_1 = (1, 0, -1)^t ; v_2 = (1, 2, 1)^t ; v_3 = (1, -1, 1)^t ; w = (1, 1, 1)^t$$

2. (Valor: 4 puntos) Sean  $B_1$  y  $B_2$  dos bases dadas en  $\mathbb{M}_{22}$ . Hallar la matriz de cambio de base de  $B_1$  a  $B_2$ , luego escribir la matriz  $A$  de la base  $B_1$  a la base  $B_2$ .

$$B_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\} ; B_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\} ; A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

3. (Valor: 9 puntos) COMPLEMENTO ORTOGONAL

- a.- (Valor: 4 puntos) Encontrar el complemento ortogonal  $W^\perp$  de  $W$  y proporcionar una base para  $W^\perp$ .

$$W = \{(x, y, z)^t \in \mathbb{R}^3 : -x + 3y - 5z = 0\}$$

- b.- (Valor: 5 puntos) Encontrar la descomposición ortogonal del vector  $v$  con respecto a  $W$ .

$$v = (4, -2, 3)^t ; W = \text{gen}\{(1, 2, 1)^t\}$$

4. (Valor: 9 puntos) ESPACIOS CON PRODUCTO INTERNO Y PROYECCIONES

- a.- (Valor: 4 puntos) Sea  $\langle u, v \rangle$  un producto interno. Demuestre que la proposición dada es una identidad.

$$\langle u, v \rangle = \frac{1}{4} \|u + v\|^2 - \frac{1}{4} \|u - v\|^2$$

- b.- (Valor: 5 puntos) Aplique el método de Gram - Schmidt a la base  $B$  para obtener una base ortonormal para el espacio con producto interno  $V$  relativo al producto interno dado.

$$V = \mathbb{R}^2 ; B = \{(1, 0)^t, (1, 1)^t\} ; \langle u, v \rangle = u^t A v, A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

5. (Valor: 9 puntos) TRANSFORMACIONES LINEALES

- a.- (Valor: 4 puntos) Sea  $T : \mathbb{P}^2 \rightarrow \mathbb{P}^2$  una transformación lineal para la cual  $T[1 + x] = 1 + x^2$ ,  $T[x + x^2] = x - x^2$  y  $T[1 + x^2] = 1 + x + x^2$ . Encontrar  $T[4 - x + 3x^2]$  y  $T[a + bx + cx^2]$ .

- b.- (Valor: 5 puntos) Hallar la matriz de transformación  $A_T$  para la transformación lineal  $T : V \rightarrow W$  con respecto a las bases canónicas en  $V$  y  $W$ . Luego escribir el vector  $v \in V$  en términos del espacio  $W$  utilizando la matriz de transformación  $A_T$ .

$$T : \mathbb{P}_2 \rightarrow \mathbb{R}^2 ; T[P(x)] = \begin{pmatrix} P(0) \\ P(1) \end{pmatrix}, v = a + bx + cx^2$$