



Nombre y Apellido:

Carnet:

1. (Valor: 4 puntos) Demuestre que los vectores v_i forman una base ortogonal B , luego expresar el vector w como una combinación lineal de dichos vectores v_i y proporcionar el vector coordenada $[w]_B$

$$v_1 = (1, 0, -1)^t ; v_2 = (1, 2, 1)^t ; v_3 = (1, -1, 1)^t ; w = (1, 1, 1)^t$$

2. (Valor: 4 puntos) Sean B_1 y B_2 dos bases dadas en \mathbb{M}_{22} . Hallar la matriz de cambio de base de B_1 a B_2 , luego escribir la matriz A de la base B_1 a la base B_2 .

$$B_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\} ; B_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\} ; A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

3. (Valor: 9 puntos) COMPLEMENTO ORTOGONAL

a.- (Valor: 4 puntos) Encontrar el complemento ortogonal W^\perp de W y proporcionar una base para W^\perp .

$$W = \{(x, y, z)^t \in \mathbb{R}^3 : -x + 3y - 5z = 0\}$$

b.- (Valor: 5 puntos) Encontrar la descomposición ortogonal del vector v con respecto a W .

$$v = (4, -2, 3)^t ; W = \text{gen}\{(1, 2, 1)^t\}$$

4. (Valor: 9 puntos) ESPACIOS CON PRODUCTO INTERNO Y PROYECCIONES

a.- (Valor: 4 puntos) Sea $\langle u, v \rangle$ un producto interno. Demuestre que la proposición dada es una identidad.

$$\langle u, v \rangle = \frac{1}{4} \|u + v\|^2 - \frac{1}{4} \|u - v\|^2$$

b.- (Valor: 5 puntos) Aplique el método de Gram - Schmidt a la base B para obtener una base ortonormal para el espacio con producto interno V relativo al producto interno dado.

$$V = \mathbb{R}^2 ; B = \{(1, 0)^t, (1, 1)^t\} ; \langle u, v \rangle = u^t A v, A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

5. (Valor: 9 puntos) TRANSFORMACIONES LINEALES

a.- (Valor: 4 puntos) Sea $T : \mathbb{P}^2 \rightarrow \mathbb{P}^2$ una transformación lineal para la cual $T[1+x] = 1+x^2$, $T[x+x^2] = x-x^2$ y $T[1+x^2] = 1+x+x^2$. Encontrar $T[4-x+3x^2]$ y $T[a+bx+cx^2]$.

b.- (Valor: 5 puntos) Hallar la matriz de transformación A_T para la transformación lineal $T : V \rightarrow W$ con respecto a las bases canónicas en V y W . Luego escribir el vector $v \in V$ en términos del espacio W utilizando la matriz de transformación A_T .

$$T : \mathbb{P}_2 \rightarrow \mathbb{R}^2 ; T[P(x)] = \begin{pmatrix} P(0) \\ P(1) \end{pmatrix}, v = a + bx + cx^2$$